NOŢIUNI TEORETICE PENTRU BACALAUREAT

Formule de calcul

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

Funcţia de gradul I

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax+b, a \neq 0$, $a,b \in R$, se numeşte funcţia de gradul I

Proprietăţi: Dacă a>0 f este strict crescătoare

Dacă a<0 f este strict descrescătoare

$A(\alpha, \beta) \in G_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$

Funcţia de gradul II

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax^2+bx+c, a \neq 0$, $a,b,c \in R$ se numeşte funcţia de gradul II

Maximul sau minimul funcţiei de gradul II

Dacă a<0 atunci $f_{max} = \frac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \frac{-b}{2a}$

Dacă a >0 atunci $f_{min} = \frac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \frac{-b}{2a}$;Vârful parabolei $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

Ecuaţia de gradul II: $ax^2+bx+c=0$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

Relaţiile lui Viete: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi diferite.

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi egale.

Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are rădăcini reale.

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale.

Intervale de monotonie :a<0

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	∞
f(x)	$\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$

a>0

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	∞
f(x)	$\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$

Semnul funcţiei de gradul II

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
f(x)		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		∞
f(x)		semnul lui a	0	semnul lui a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$		∞
f(x)		semnul lui a	

Imaginea funcţiei de gr.II

a<0,Imf=$(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$

a>0, Imf=$[\frac{-\Delta}{4a}, \infty)$

Funcţii

Definiţii: Fie f:A$\to$B

I. 1)**Funcţia f se numeşte injectivă**,dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

2)**Funcţia f este injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

3)**Funcţia f este injectivă**, dacă orice paralelă la axa 0x,dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

4)Funcţia f nu este injectivă dacă $\exists x_1 \neq x_2 a.i. f(x_1) = f(x_2)$

II.1)**Funcţia *f* este surjectivă**, dacă $\forall$ y $\in$B, există cel puţin un punct x $\in$A, a.î. f(x)=y.

2) Funcţia f este surjectivă, dacă f(A) =B.

3) Funcţia f este surjectivă, dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

III.1) **Funcţia *f* este bijectivă** dacă este injectivă şi surjectivă.

2) Funcţia f este bijectivă dacă pentru orice y $\in$B există un singur x $\in$A a.î. f(x) =y (ecuaţia f(x)=y,are o singură soluţie,pentru orice y din B)

3) Funcţia f este bijectivă dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei într-un singur punct .

IV.Compunerea a două funcţii

Fie f:A→B,g:B→C

$g \circ f : A \to C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

V. $1_A : A \to A$ prin $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.(aplicaţia identică a lui A)

Definiţie: Funcţia f: A→B este inversabilă , dacă există o funcţie g:B→A astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$, funcţia g este inversa funcţiei f şi se notează cu f^{-1}.

Teoremă: f este bijectivă <=> f este inversabilă.

Funcţii pare,funcţii impare,funcţii periodice.
Definiţii:
f:R→R se numeşte funcţie pară dacă f(-x) = f(x), $\forall$ x$\in R$
f:R→R se numeşte funcţie impară dacă f(-x) = -f(x), $\forall$ x$\in R$
f:A→R(A$\subset R$) se numeşte periodică de perioadă T$\neq 0, dacă \forall x \in A$ avem x+T$\in A$ şi f(x+T)=f(x).Cea mai mică perioadă strict pozitivă se numeşte perioada principală.
Numărul funcţiilor f:A→B este $[n(B)]^{n(A)}$,n(A) reprezentâd numărul de elemente al mulţimii A.
Numărul funcţiilor bijective f:A→A este egal cu n!,n fiind numărul de elemente al mulţimii A.
Numărul funcţiilor injective f:A→B este A_n^k,unde n reprezintă numărul de elemente al mulţimii B, iar k al mulţimii A(k$\leq n$)
Funcţia exponenţială
Definiţie f: R→ (0,∞), f(x)= a^x ,a>0,a $\neq 1$ se numeşte funcţie exponenţială.
Proprietăţi:
1)Dacă a>1 $\Rightarrow$ f strict crescătoare
2)Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare
3)Funcţia exponenţială este bijectivă
Funcţia logaritmică
Definiţie: f:(0,∞) →R, f(x)= $\log_a$ x , a>0, a $\neq$ 1 se numeşte funcţie logaritmică.
Proprietăţi:
1)Dacă a >1 $\Rightarrow$ f strict crescătoare
2)Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare
3)Funcţia logaritmică este bijectivă
4)$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 5)$\log_a x^m = m\log_a x$,m$\in R$
6)$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ 7)$a^{\log_a x} = x$
Schimbarea bazei:$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$,$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Progresii aritmetice

Definiţie: Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere reale a_n în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit raţia progresiei aritmetice:$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \geq 1$
Se spune că numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
Teoremă:şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$
Termenul general al unei progresii aritmetice:$a_n = a_1 + (n-1)r$
Prop.:Numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică$\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie aritmetică de forma :

$x_1 = u - r,\ x_2 = u,\ x_3 = u + r$; $u, r \in R$.

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$x_1 = u - 3r,\ x_2 = u - r,\ x_3 = u + r,\ x_4 = u + 3r,\ u, r \in R$.

Progresii geometrice

Definiţie : Se numeşte **progresie geometrică** un şir de numere reale $b_n, b_1 \neq 0$ în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit raţia progresiei geometrice: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, $q \neq 0$

Se spune că numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Teoremă:şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2$

Termenul general al unei progresii geometrice: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Prop.: Numerele a,b,c sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$ sau

$S_n = n \cdot b_1, dacă$ q = 1

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie geometrică de forma :

$x_1 = \frac{u}{q}, x_2 = u, x_3 = u \cdot q, q \neq 0$

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică de forma:

$x_1 = \frac{u}{q^3}, x_2 = \frac{u}{q}, x_3 = u \cdot q, x_4 = u \cdot q^3, q \neq 0$

Formule utile:

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+\cdots+n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

Modulul numerelor reale Proprietăţi:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

1. $|x| \geq 0, \forall x \in R$ **2.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ **3.** $|x| = |-x|$ **4.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ **5.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$ **7.** $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), a > 0$ **8.** $|x + y| \leq |x| + |y|$

Partea întreagă

1.x = $[x]+\{x\}$, $\forall x \in R$, [x]$\in Z$ şi {x}$\in[0,1)$

2. [x]$\leq$ x< [x]+1, [x] = a $\Rightarrow a \leq x$< a+1

3. [x+k]=[x]+k, $\forall x \in R, k \in Z$

4. {x+k}={x}, $\forall x \in R, k \in Z$

Numere complexe

1. Numere complexe sub formă algebrică

z =a+bi, a,b$\in R$, $i^2=-1$, a=Re z , b=Im z

C- mulţimea numerelor complexe;C={a+bi/a,b$\in R$ }

Conjugatul unui număr complex: $\overline{z}=a-bi$

Proprietăţi:

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

2. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

3. $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5.z$\in R \Leftrightarrow z=\overline{z}$

6.z$\in R^* i \Leftrightarrow z=-\overline{z}$

Modulul unui număr complex: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Proprietăţi:

1. $|z|\geq 0, \forall z \in C$ 2. $|z|=|\overline{z}|$ 3. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

4. $|z^n|=|z|^n$ 5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ 6. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

Numere complexe sub formă trigonometrică

Forma trigonometrică a numerelor complexe:

z = r(cos t + i sin t) ,r = $\sqrt{a^2+b^2}, tgt=\frac{b}{a}$;r-raza polară;t-argument redus,t$\in[0,2\pi)$

M(a,b)-reprezintă imaginea geometrică a numărului complex z = a+bi

Operaţii:

$z_1=r_1(\cos t_1+i\sin t_1), z_2=r_2(\cos t_2+i\sin t_2)$

$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2)], z^n=r^n(\cos nt+i\sin nt)$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1-t_2)+i\sin(t_1-t_2)]$

$\sqrt[n]{z}=z_k=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{t+2k\pi}{n}+i\sin\frac{t+2k\pi}{n}), k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$

Combinatorică

n!=$1\cdot 2\cdots n$,n$\in N (0!=1)$, P$_n = n!$,n$\in N^*$

A$_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$,$0\le k\le n; k,n\in N, n\ge 1$ C$_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0\le k\le n; k,n\in N$

Proprietăţi:1. C$_n^k = C_n^{n-k}$,$0\le k\le n; k,n\in N$ 2. C$_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$,$1\le k$ <n;k,n$\in N$

Binomul lui Newton:(a+b)$^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$

Termenul general:T$_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0,1,\cdots,n$

Proprietăţi:

C$_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ (numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n).

C$_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

Geometrie vectorială

Definiţie:

Se numesc vectori egali, vectorii care au aceeaşi direcţie,acelaşi sens şi acelaşi modul.
Doi vectori se numesc opuşi dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri contrare: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Definiţie:

Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puţin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli şi au aceeaşi direcţie. În caz contrar se numesc necoliniari.

Teoremă: Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v}$, există $\alpha,\beta \in R(unice)$ astfel încât $\vec{v} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b}$

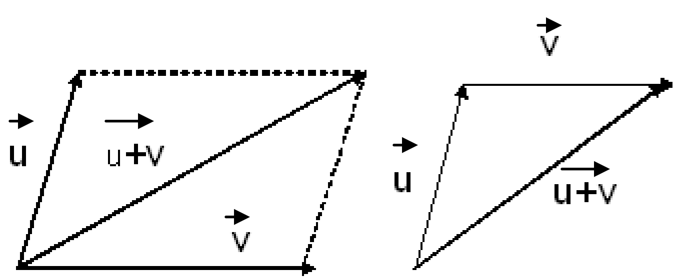
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ -modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A) - coordonatele$ vectorului $\overrightarrow{AB}$

Mijlocul segmentului AB:x$_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}, y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Centrul de greutate al triunghiului ABC:x$_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Adunarea vectorilor se poate face după regula paralelogramului sau triunghiului



Teoremă:Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt **coliniari** $\Leftrightarrow\ \exists\ \lambda \in R\ a.i.\ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \exists\ \lambda \in R\ a.i.\ \overrightarrow{AB} = \lambda\ \overrightarrow{AC}$

AB $\parallel$ CD $\Leftrightarrow \exists\ \lambda \in R\ a.i.\ \overrightarrow{AB} = \lambda\ \overrightarrow{AC}$

Produsul scalar a doi vectori .

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, v = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2, |\vec{u}| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}$

Daca $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$,atunci $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ecuaţiile dreptei în plan

Ecuaţia carteziană generală a dreptei:**ax+by+c=0** (d)

Punctul M(x_M ,y_M)$\in d \Leftrightarrow a \cdot x_M + by_M + c = 0$

Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte:A(x_A, y_A) ,B(x_B, y_B)

AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$ =0

Ecuaţia dreptei determinată de un punct A(x_A, y_A) şi panta m : y-y_A= $m(x - x_A)$

Dreptele d_1,d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$

Dreptele d_1,d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2}$ = -1

Distanţa dintre punctele A(x_A, y_A) ,B(x_B, y_B) :AB=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Distanţa de la punctul A(x_A, y_A) la dreapta h:ax+by+c=0:

d(A,h)= $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Punctele A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Permutări

Definiţie:Se numeşte permutare de gradul n a mulţimii $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ orice funcţie bijectivă $\sigma : A \to A$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ se numeşte permutarea identică de gradul n**.**

S_n reprezintă mulţimea permutărilor de gradul n.

Produsul(compunerea) a două permutări:Fie $\sigma, \tau \in S_n$

$\sigma \circ \tau : A \to A, (\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$

Proprietăţi:

1) $(\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta), \forall \sigma, \tau, \delta \in S_n$

2) $\sigma e = e\sigma = \sigma, \forall \sigma \in S_n$

3) $\forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n a.i. \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$, σ^{-1} se numeşte inversa permutării σ

Puterile unei permutări: $Fie \sigma \in S_n - definim\, \sigma^n = \sigma^{n-1}\sigma, n \in N^* (\sigma^0 = e)$

Prop.: $Fie \sigma \in S_n \Rightarrow \sigma^m \sigma^n = \sigma^{m+n}, (\sigma^m)^n = \sigma^{mn}, \forall m, n \in N$

Inversiunile unei permutări:

Definiţie: $Fie \sigma \in S_n$ şi i,j$\in \{1, 2, \cdots, n\}, i \langle j$ .Perechea (i,j) se numeşte inversiune a permutării σ dacă $\sigma(i) \rangle \sigma(j)$ .Numărul inversiunilor permutării σ se notează cu m(σ).

Definiţii: Se numeşte semnul permutării σ ,numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

Permutarea σ se numeşte permutare pară dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$

Permutarea σ se numeşte permutare impară dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$

Propoziţie: $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau), \forall \sigma, \tau \in S_n$

Permutarea $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ se numeşte transpoziţie.

Proprietăţi:

1) $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 2) $(\delta_{ij})^2 = e$ 3) $\delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$ 4) $\varepsilon(\delta_{ij}) = -1$

Matrice

A= $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n} \\ a_{21}a_{22}......a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn} \end{pmatrix}$ -matrice cu m linii şi n coloane; $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$

$A \in M_{m,n}(C)$ **,**unde $M_{m,n}(C)$ -reprezintă mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din C.

${}^tA \in M_{n,m}(C)$ -reprezintă transpusa lui A şi se obţine din A prin schimbarea liniilor în coloane(sau a coloanelor în linii).

Dacă m = n atunci matricea se numeşte pătratică de ordinul n şi are forma

A= $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n} \\ a_{21}a_{22}......a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}.....a_{nn} \end{pmatrix}$ - $A \in M_n(C)$

Tr(A)= $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ -reprezintă urma matricei A

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ se numeşte diagonala principală a matricei A,iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, \cdots, a_{n1})$ se numeşte diagonala secundară a matricei A.

$I_n = \begin{pmatrix} 100\cdots\cdots 0 \\ 010\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 000\cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$-matricea unitate de ordinul n ; $O_{m,n} = \begin{pmatrix} 000\cdots\cdots 0 \\ 000\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 000\cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$-matricea nulă

Proprietăţi ale operaţiilor cu matrice.:

1)A+B=B+A , $\forall A, B \in M_{m,n}(C)$ (comutativitate)

2)(A+B)+C = A+(B+C) , $\forall A, B, C \in M_{m,n}(C)$ (asociativitate)

3)A+ $O_{m,n}$ = $O_{m,n}$ +A = A , $\forall A \in M_{m,n}(C)$

4) $\forall A \in M_{m.n}(C), \exists(-A) \in M_{m,n}(C)$ a.î. A+(-A) = (-A)+A= $O_{m,n}$, $\forall A \in M_{m,n}(C)$

5)(AB)C = A(BC) , $A \in M_{m,n}(C), B \in M_{n,p}(C), C \in M_{p,q}(C)$ (asociativitate)

6)a)A(B+C) = AB+AC , $A \in M_{m,n}(C), B, C \in M_{n,p}(C)$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)

b)(B+C)A = BA+CA, $B, C \in M_{m,n}(C), A \in M_{n,p}(C)$

7) $AI_n = I_n A = A, \forall A \in M_n(C)$

8)a(bA) = (ab)A, $\forall a, b \in C, A \in M_{m,n}(C)$

9)(a+b)A=aA+bA, $\forall a, b \in C, A \in M_{m,n}(C)$

10)a(A+B)=aA+aB, $\forall a \in C, A, B \in M_{m,n}(C)$

11)aA = $O_{m,n}$ $\Leftrightarrow a = 0$ sau A= $O_{m,n}$

12) ${}^t({}^tA) = A, {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(aA) = a\,{}^tA, {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Puterile unei matrice:Fie $A \in M_n(C)$

Definim $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \cdots, A^n = A^{n-1} \cdot A, n \in N^*$

Relaţia Hamilton-Cayley: $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$,unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Determinanţi.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (determinantul de ordinul doi)

Determinantul de ordinul trei(regula lui Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

$a \quad b \quad c$

$d \quad e \quad f$

Proprietăţi:

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;
3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii(sau coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.
4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;
5. Dacă toate elementele unei linii(sau coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un element a, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu a înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.
6. Dacă elementele a două linii(sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale atunci determinantul matricei este nul;
7. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinaţie liniară de celelate linii(sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.
8. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi element se obţine o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei iniţiale;

9) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+m & e+n & f+p \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ g & h & i \end{vmatrix}$

10) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, $\forall$ $A,B \in M_n(C)$

Definiţie:Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ .Se numeşte minor asociat elementului $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ determinantul matricei obţinute din A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j.Se notează acest minor cu M_{ij} .

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ se numeşte complementul algebric al elementului a_{ij} .

Matrice inversabile

Inversa unei matrice :$A \in M_n(C)$ se numeşte inversabilă dacă există o matrice notată $A^{-1} \in M_n(C)$ a.i. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Teoremă:$A \in M_n(C)$ *inversabilă* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$,A^* adjuncta matricei A. A^* se obţine din ${}^tA$ înlocuind fiecare element cu complementul său algebric.

Dacă $A,B \in M_n(C)$ sunt inversabile,atunci au loc relaţiile: a)$(A^{-1})^{-1} = A$

b)$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Rangul unei matrice

Fie $A \in M_{m,n}(C)$, $r \in N, 1 \le r \le \min(m,n)$

Definiţie: Se numeşte minor de ordinul r al matricei A,determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecţia celor r linii şi r coloane.

Definiţie: Fie A$\neq 0_{m,n}$ o matrice . Numărul natural r este rangul matricei A $\Leftrightarrow$ există un minor de ordinul r al lui A,nenul, iar toţi minorii de ordin mai mare decât r (dacă există)sunt nuli.
Teoremă: Matricea A are rangul r $\Leftrightarrow$ există un minor de ordin r al lui A, nenul , iar toţi minorii de ordin r+1(dacă există)obtinuţi prin bordarea(adaugarea unei linii şi a unei coloane)minorului de ordin r cu elementele corespunzatoare ale uneia dintre liniile şi uneia dintre coloanele rămase sunt zero.

Sisteme de ecuaţii liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuaţii cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a$_{ij}$ -coeficienţii necunoscutelor, x$_1, x_2, \cdots, x_n$ - necunoscute, b$_1, b_2, \cdots, b_m$ -termenii liberi

A=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n} \\ a_{21}a_{22}......a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn} \end{pmatrix}$-matricea sistemului, $\overline{A}$ =$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}......a_{2n}b_2 \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn}b_m \end{pmatrix}$-matricea extinsă

B=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$matricea coloană a termenilor liberi,X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.matricea necunoscutelor.

AX=B -forma matriceală a sistemului
Definiţie:
- Un sistem se numeşte incompatibil dacă nu are soluţie;
- Un sistem se numeşte compatibil dacă are cel puţin o soluţie;
- Un sistem se numeşte compatibil determinat dacă are o singură soluţie;
- Un sistem se numeşte compatibil nedeterminat dacă are mai mult de o soluţie.

Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:
Un sistem de ecuaţii liniare este de tip Cramer dacă numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricei sistemului este nenul.
Teorema lui Cramer: Dacă det A notat $\Delta \neq 0$, atunci sistemul AX=B are o soluţie unică x$_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$,unde Δ_i se obţine înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.
Teorema lui Kronecker- Capelli: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.
Teorema lui Rouche: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Elemente de geometrie şi trigonometrie

Formule trigonometrice.Proprietăţi.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$$

-1 $\le \sin x \le 1, \forall x \in R$

-1 $\le \cos x \le 1, \forall x \in R$

sin(x+2k $\pi) = \sin x, \forall x \in R, \forall k \in Z$

cos(x+2k $\pi) = \cos x, \forall x \in R, \forall k \in Z$

sin(a+b)=sinacosb+sinbcosa

cos(a+b)=cosacosb-sinasinb

sin(a-b)=sinacosb-sinbcosb

cos(a-b)=cosacosb+sinasinb

sin2x=2sinxcosx,

cos2x=cos $^2 x - \sin^2 x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

sina+sinb=2sin $\frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

cosa+cosb=2cos $\frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

sina-sinb=2sin $\frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

cosa-cosb= -2sin $\frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$

tgx= $\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \ne 0$

ctgx= $\frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \ne 0$

tg(x+k $\pi) = tgx$

ctg(x+k $\pi) = ctgx$

$tg(\frac{\pi}{2} - x) = ctgx$

$ctg(\frac{\pi}{2} - x) = tgx$

tg(a+b)= $\frac{tga + tgb}{1 - tgatgb}$

tg(a-b)= $\frac{tga - tgb}{1 + tgatgb}$

tg2x= $\frac{2tgx}{1 + tg^2 x}$

sinx = $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$

cosx = $\frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$

Valori principale ale funcţiilor trigonometrice

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Semnele funcţiilor trig.

sin:+,+,-,-

tg.,ctg.:+,-+,-

cos:+,-,-,+

sin(-x)= -sinx (impară) cos(-x)=cosx(pară)

tg(-x)= -tgx ctg(-x)= -ctgx

Funcţii trigonometrice inverse

arcsin:$[-1,1]\rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ arcsin(-x)= -arcsinx

arcsin(sinx)=x, $\forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sin(arcsinx)=x,x$\in[-1,1]$

arccos:$[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$ arccos(-x)=$\pi-\arccos x$

arccos(cosx)=x, $\forall x\in[0,\pi]$ cos(arccosx)=x, $\forall x\in[-1,1]$

arcsinx+arccosx=$\frac{\pi}{2},\forall x\in[-1,1]$

arctg:R$\rightarrow(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ arctg(-x)= -arctgx

arctg(tgx)=x, $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tg(arctgx)=x, $\forall x\in R$

arcctg:R$\rightarrow(0,\pi)$ arcctg(-x)=$\pi-arcctgx$

arcctg(ctgx)=x, $\forall x\in(0,\pi)$ ctg(arcctgx)=x, $\forall x\in R$

arctgx+arcctgx=$\frac{\pi}{2},\forall x\in R$

Ecuaţii trigonometrice

sinx = a,a$\in[-1,1]\Rightarrow x\in\{(-1)^k\arcsin a+k\pi,k\in Z\}$

cosx = b,b$\in[-1,1]\Rightarrow x\in\{\pm\arccos b+2k\pi,k\in Z\}$

tgx = c,c$\in R\Rightarrow x\in\{arctgc+k\pi,k\in Z\}$

ctgx = d,d$\in R\Rightarrow x\in\{arcctgd+k\pi,k\in Z\}$

sinax = sinbx$\Rightarrow ax=(-1)^k bx+k\pi,k\in Z$

cosax = cosbx$\Rightarrow ax=\pm bx+2k\pi,k\in Z$

tgax = tgbx$\Rightarrow ax=bx+k\pi,k\in Z$

ctgax = ctgbx$\Rightarrow ax=bx+k\pi,k\in Z$

Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ **=**2R,unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Teorema cosinusului:a$^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

Aria unui triunghi:

A$_{\Delta}=\frac{b\cdot h}{2}$ **A**$_{\Delta}=\frac{AB\cdot AC\sin(AB,AC)}{2}$ **A**$_{\Delta}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **,**p=$\frac{a+b+c}{2}$

A$_{\Delta ABC}=\frac{|\Delta|}{2},\Delta=\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$ **A**$_{\Delta dreptunghic}=\frac{c_1\cdot c_2}{2}$ **A**$_{\Delta echilateral}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Raza cercului circumscris unui triunghi: R= $\frac{abc}{4S}$,unde S este aria triunghiului

Raza cercului înscris într-un triunghi:R= $\frac{S}{p}$,unde S este aria triunghiului iar

p= $\frac{a+b+c}{2}$

Grupuri

Definiţie: Fie $*: M \times M \to M$ lege de compozitie pe M.O submultime nevidă H a lui M ,se numeşte parte stabilă a lui M în raport cu legea "$*$"dacă $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

Proprietăţile legilor de compoziţie

Fie $*: M \times M \to M$ lege de compoziţie pe M.

Legea "$*$ " se numeşte asociativă dacă $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

Legea "$*$ " se numeşte comutativă dacă $x * y = y * x, \forall x, y \in M$

Legea "$*$ " admite element neutru dacă exista $e \in M$ a.i. $x * e = e * x = x, \forall x \in M$

Definiţie:Cuplul $(M, *)$ formează un monoid dacă are proprietăţile:

1) $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

2) există $e \in M$ a.i. $x * e = e * x = x, \forall x \in M$

Dacă în plus $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ atunci monoidul se numeşte comutativ.

Notaţie:U(M)={$x \in M / x$ este simetrizabil}

Definiţie:Cuplul $(G, *)$ formează un grup dacă are proprietăţile:

1) $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

2) există $e \in M$ a.i. $x * e = e * x = x, \forall x \in G$

3) $\forall x \in G, \exists x' \in G$ a.i. $x * x' = x' * x = e$

Dacă în plus $x * y = y * x, \forall x, y \in G$ atunci grupul se numeşte abelian sau comutativ.

Definiţie:Un grup G se numeşte finit dacă mulţimea G este finită şi grup infinit ,în caz contrar.

Se numeşte ordinul grupului G ,cardinalul mulţimii G(numărul de elemente din G).

Ordinul unui element

Defintie:Fie $(G, \bullet)$ un grup şi $x \in G$ .Cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea $x^n = e$ se numeşte ordinul elementului x în grupul G.(ordx = n)

Subgrup

Definiţie:Fie $(G, *)$ un grup.O submulţime nevidă H a lui G se numeşte subgrup al grupului $(G, *)$ dacă îndeplineşte condiţiile:

1) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

2) $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$

Grupul claselor de resturi modulo n, $Z_n = \{\hat{1}, \hat{2}, \cdots, \widehat{n-1}\}$

$(Z_n, +)$ **− grup abelian**

$(Z_n, \cdot)$ **-monoid comutativ** ,în care $U(Z_n) = \{\hat{k} \in Z_n / c.m.m.d.c.(k, n) = 1\}$

Morfisme şi izomorfisme de grupuri

Definiţie:Fie $(G,*)$ şi $(G^{'},\circ)$ două grupuri.O funcţie f:$G\to G^{'}$ se numeşte morfism de grupuri dacă are loc conditia f($x*y)=f(x)\circ f(y),\forall x,y\in G$

Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de grupuri.

Prop. Fie $(G,*)$ şi $(G^{'},\circ)$ două grupuri.Dacă f:$G\to G^{'}$este morfism de grupuri atunci:

1)f(e)=$e^{'}$ unde e,$e^{'}$ sunt elementele neutre din cele două grupuri.

2)f($x^{'})=[f(x)]^{'}\ \forall x\in G$

Inele şi corpuri

Definiţie: Un triplet $(A,*,\circ)$, unde A este o multime nevidă iar ,,$*$" şi ,,$\circ$" sunt două legi de compozitie pe A,este inel dacă:

1) (A,$*$)este grup abelian
2) (A,$\circ$)este monoid
3)Legea ,,$\circ$"este distributivă fata de legea ,,$*$":

$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)\forall x,y,z\in A$

Inelul $(A,*,\circ)$, este fără divizori ai lui 0,dacă $\forall x.y\neq e_{*}\Rightarrow x\circ y\neq e_{*}$(e_{*} element neutru de la legea ,,$*$")

Un inel $(A,*,\circ)$, se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: $x\circ y=y\circ x,\forall x,y\in A$

Un inel $(A,*,\circ)$, comutativ,cu cel putin 2 elemente şi fără divizori ai lui 0, se numeşte,**domeniu de integritate** .

Definiţie :Un inel $(K,*,\circ)$cu $e_{*}\neq e_{\circ}$ se numeşte corp dacă $\forall x\in K,x\neq e_{*},\exists x^{'}\in K$ a.i.

$x\circ x^{'}=x^{'}\circ x=e_{\circ}(e_{*},e_{\circ}$ fiind elementele neutre)

Un corp $(K,*,\circ)$, se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: $x\circ y=y\circ x,\forall x,y\in K$

Obs.:Corpurile nu au divizori ai lui zero.

Morfisme şi izomorfisme de inele şi corpuri.

Definiţie : Fie $(A,*,\circ),(A^{'}\oplus,\otimes)$ două inele.O funcţie f:$A\to A^{'}$ se numeşte morfism de inele dacă :

1)f($x*y)=f(x)\oplus f(y),\forall x,y\in A$

1)f($x\circ y)=f(x)\otimes f(y),\forall x,y\in A$

3)f($e_{\circ}$)=$e_{\otimes}$ ($e_{\circ},e_{\otimes}$ fiind elementele neutre corespunzătoare legilor $\circ,\otimes$)

Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de inele.

Definiţie:Fiind date corpurile K,$K^{'}$,orice morfism(izomorfism) de inele de la K la $K^{'}$,se numeşte morfism(izomorfism)de corpuri.

Inele de polinoame

Forma algebrică a unui polinom:f = $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,a_n\neq0$**,** $a_i\in A$un inel comutativ.

Definiţie:a$\in A$ se numeşte rădăcină a polinomului f dacă f(a)=0.

Teorema împărţirii cu rest: Fie K un corp comutativ,iar f şi g,cu g$\neq$ 0, *polinoame* din K[X].Atunci există polinoamele q şi r din K[X] ,unic determinate,astfel încât f=gq+r cu gradr<gradg.

Dacă r = 0,adică f = gq ,atunci spunem că polinomul g divide polinomul f.

Teorema restului: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X] şi a un element din K $\Rightarrow$restul împărţirii lui f la X-a este f(a).

Consecinţă:a este radăcină a lui f $\Leftrightarrow$ X-a divide f.
Definiţie:Elementul a$\in K$ este rădăcină de ordinul p$\in N^*$ pentru polinomul f$\in K[X]$ dacă (X-a)^p divide pe f iar (X-a)$^{p+1}$nu divide pe f.
Teoremă: Elementul a$\in K$ este rădăcină de ordinul p$\in N^*$ pentru polinomul f$\in K[X] \Leftrightarrow f(a)=0, f^{'}(a)=0,\cdots, f^{(p-1)}(a)=0$ şi $f^{(p)}(a)\neq 0$,unde f este fucţia polinomială asociată polinomului f.

Polinoame cu coeficienţi reali

Teoremă: Fie f$\in R[X]$,f$\neq 0$.Dacă z = a+ib,b$\neq 0$este o rădăcină complexă a lui f,atunci:
1) $\overline{z}$ = a-ib este de asemenea o rădăcină complexă a lui f
1)z şi $\overline{z}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.
Obs. : $(X-z)(X-\overline{z})/f$

Polinoame cu coeficienţi raţionali

Teoremă : Fie f$\in Q[X]$, f$\neq 0$.Dacă x$_0 = a+\sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f,unde a,b$\in Q, b\rangle 0, \sqrt{b}\notin Q$,atunci
1) $\overline{x_0} = a-\sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f 2)x$_0$, $\overline{x_0}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.
Obs. : $(X-x_0)(X-\overline{x_0})/f$

Polinoame cu coeficienţi întregi

Teoremă :fie f=$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0, a_n\neq 0$**;**f$\in Z[X]$
1)Dacă x$_0$=$\dfrac{p}{q}$(p,q numere prime între ele) este o rădăcină raţională a lui f,atunci
a)p divide termenul liber a$_0$
b)q divide pe a$_n$
2)Dacă x$_0$= p este o rădăcină întreagă a lui f,atunci p este un divizor al lui a$_0$.

Polinoame ireductibile

Definiţie: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X] cu gradf>0 se numeşte reductibil peste K dacă există g,q din K[X] cu gradg<gradf,gradq<gradf astfel încât f=gq. Dacă f nu este reductibil peste K atunci se spune că f este ireductibil peste K.
Prop.: Polinoamele de grad 2 sau 3 din K[X] sunt ireductibile peste K $\Leftrightarrow$ nu au rădăcini în K.
Relaţiile lui Viete: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X],
f =$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0, a_n\neq 0$**.**Dacă $x_1, x_2,\cdots, x_n$ sunt n rădăcini ale lui f în K atunci f =$a_n(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$ şi

$x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_{n-1}\cdot a_n^{-1}$

$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_{n-2}a_n^{-1}$

....

x$_1 x_2\cdots x_n=(-1)^n a_0 a_n^{-1}$

Dacă f $= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$

f=$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$

Ecuaţii reciproce

Definiţie:O ecuaţie de forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_n \neq 0$ pentru care $a_{n-i} = a_i, 0 \leq i \leq n$ se numeşte ecuaţie reciprocă de gradul n.

Orice ecuaţie reciprocă de grad impar are rădăcina -1.

Ecuaţia reciprocă de gradul IV are forma:a $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$

Se împarte prin x^2şi devine a$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$;notez x$+ \frac{1}{x} = t$ şi obţinem o ecuaţie de gradul II.

Şiruri de numere reale

Şir monoton (crescător sau descrescător)

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale.

Şirul(a_n) este crescător dacă: $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul(a_n) este strict crescător dacă: $a_n < a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul(a_n) este descrescător dacă: $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul(a_n) este strict descrescător dacă: $a_n > a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şir mărginit

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale.

Şirul(a_n) este mărginit dacă: $\exists \alpha, \beta \in$ R a.i.$\alpha \leq a_n \leq \beta, \forall n \in N$

Definiţie

Un şir care are limita finită se numeşte convergent.

Un şir care nu are limită sau care are limita infinită se numeşte divergent

Teoremă :Orice şir convergent este mărginit.

Consecinţă :Dacă un şir este nemărginit atunci el este divergent.

Teoremă Dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită.
Consecintă: dacă un şir conţine două subşiruri cu limite diferite, atunci şirul nu are limită.

▪**Teorema lui Weierstrass**

Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

▪**Teorema cleştelui**

Dacă $x_n \le a_n \le y_n, \forall n \ge k$ si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

▪ **Criteriul raportului**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,1)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Daca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in (1,\infty)$ sau $l = \infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

- **Lema lui Stolz-Cezaro**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ şi $(b_n)_{n\in N}$ două şiruri de numere reale.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (finit sau infinit) şi $(b_n)_{n\in N}$ este strict monoton şi nemărginit ,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

▪ **Criteriul radicalului**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir cu termeni strict pozitivi.Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Şiruri remarcabile

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } q \in (-1,1) \\ 1, \textit{dacă } q = 1 \\ \infty, \textit{dacă } q \in (1,\infty) \\ \textit{nu există, dacă } q \in (-\infty,-1] \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, \alpha \rangle 0 \\ 0, \alpha \langle 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$,unde $a \in (-1,1), k \in \mathrm{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $e = 2{,}7178$..este constanta lui Euler

generalizare: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ dacă $x_n \to \pm\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$ dacă $y_n \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{tg}\, x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{arc\,\mathrm{tg}\, x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$,

Limite de functii

Teoremă: O funcţie are limită într-un punct finit de acumulare dacă şi numai dacă are limite laterale egale în acel punct.

f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \langle x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \rangle x_0}} f(x)$

Obs.: Funcţia f : $D \to R$ nu are limită în punctul de acumulare x_0 în una din situaţiile :

a) există un şir $x_n \in D - \{x_0\}$ cu limita x_0 astfel încât şirul $(f(x_n))$ nu are limită

b) există şirurile $(x_n), (y_n), x_n, y_n \in D - \{x_0\}$, astfel încât şirurile $(f(x_n)), (f(y_n))$ au limite diferite.

Teoremă: Fie f : $D \to R$, o funcţie elementară şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui $D \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor finite)

Fie f,g: $D \to R$ şi x_0 un punct de acumulare al lui D. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ şi există $l \in R$ a.î. $|f(x) - l| \leq g(x), \forall x \in D \cap V, x \neq x_0$, V vecinătate a lui x_0 şi dacă

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor infinite)

Fie f,g: $D \to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi $f(x) \leq g(x), \forall x \in D \cap V, x \neq x_0$, V vecinătate a lui x_0.

a) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

b) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Teoremă(Criteriul cleştelui)

Fie f,g,h: $D \to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi

$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D \cap V, x \neq x_0$, V vecinătate a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Limite uzuale.Limite remarcabile.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_m}, k = m \\ 0, m \rangle k \\ \dfrac{a_k}{b_m} \cdot (\pm\infty)^{k-m}, k \rangle m \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\quad\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$ $\quad\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$ $\quad\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty \text{ , daca } a>1 \\ 0 \text{ , daca } a\in(0,1) \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ , daca } a>1 \\ \infty \text{ , daca } a\in(0,1) \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty \text{ , daca } a>1 \\ -\infty \text{ , daca } a\in(0,1) \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ , daca } a>1 \\ \infty \text{ , daca } a\in(0,1) \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to\infty} arcctgx = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\ x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin\ x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln\ a \quad , \ a>0, a\neq1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\ u(x)}{u(x)} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\ u(x)}{u(x)} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin\ u(x)}{u(x)} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}\ u(x)}{u(x)} = 1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln\ a \quad , \ a>0, a\neq1$ unde $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$

Operaţii fără sens: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Funcţii continue

Definiţie Fie $f : D \to R$ şi $x_0 \in \mathrm{D}$ punct de acumulare pentru D

f este continuă în $x_0 \in \mathrm{D}$ dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dacă f nu este continuă în $x_0 \in \mathrm{D}$,ea se numeşte discontinuă în x_0 ,iar x_0 se numeşte punct de discontinuitate.

Definiţii: Un punct de discontinuitate $x_0 \in \mathrm{D}$ este punct de discontinuitate de prima speţă pentru f ,dacă limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 există şi sunt finite.

Un punct de discontinuitate $x_0 \in \mathrm{D}$ este punct de discontinuitate de speţa a doua dacă nu este de prima speţă.(cel puţin una din limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 nu este finită sau nu există)

Teoremă: Fie $f : D \to R$ şi $x_0 \in \mathrm{D}$ punct de acumulare pentru D $\Rightarrow$ f continuă în x_0 $\Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) = \mathrm{f}(x_0)$

Teoremă:Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiţie.

Operaţii cu funcţii continue

Teoremă:Fie f,g:D$\to R$ continue pe D

$\Rightarrow$ f+g, $f\cdot g, \frac{f}{g}(g\neq0), |f|, \max(f,g), \min(f,g)$ sunt funcţii continue pe D.

Compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă.

Teoremă: Fie f:[a,b]$\to$R o funcţie continuă a.î. f(a)f(b)<0 $\Rightarrow \exists\ c\in(a,b)$ pentru care f(c)=0.

Asimptote

1.Asimptote verticale

Definiţie: Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la stanga pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$.

Definiţie: Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la dreapta pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$.

Definiţie : Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală pentru f dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât şi la dreapta sau numai lateral.

2.Asimptote oblice

Teorema : Fie f :E$\to R,$ unde E conţine un interval de forma(a,∞)

Dreapta y=mx+n,m$\neq 0$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă şi numai dacă m,n sunt numere reale finite,unde m=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$.Analog la -$\infty$.

3.Asimptote orizontale

Dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l, l$ număr finit atunci y = l este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f.

Analog la -∞

Obs :O funcţie nu poate admite atât asimptotă orizontala cât şi oblică spre $+\infty$(-∞)

Funcţii derivabile

Definiţie:Fie f:D$\to R$,$x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D

Derivata într-un punct:$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

f este derivabilă în x_0 dacă limita precedentă există şi este finită.

▪Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcţiei are în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ tangentă a cărei pantă este $f'(x_0)$ .Ecuaţia tangentei este: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Teoremă: Fie f:D$\to$R **,** $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D$\Rightarrow$f este derivabilă în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in$ R(finite) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \langle x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \rangle x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$.

Teoremă . Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Puncte de întoarcere.Puncte unghiulare.

Definiţii: Fie f:D$\to$R **,** $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D.Punctul x_0 se numeşte punct de întoarcere al funcţiei f, dacă f este continuă în x_0 şi are derivate laterale infinite şi diferite în acest punct. Punctul x_0 se numeşte punct unghiular al funcţiei f dacă f este continuă în x_0,are derivate laterale diferite în x_0 şi cel puţin o derivată laterală este finită.

Derivatele funcţiilor elementare

Functia	Derivata
c	0
x	1
$x^n, n \in \mathbf{N}^*$	nx^{n-1}
$x^r, r \in \mathbf{R}$	rx^{r-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Operaţii cu funcţii derivabile

Teoremă: Fie f,g:D$\to R$ derivabile pe D$\Rightarrow$f+g ,fg, $\frac{f}{g}$ (g$\neq 0$)sunt funcţii derivabile pe D.

Compunerea a două funcţii derivabile este o funcţie derivabilă.

Reguli de derivare

$$(f \pm g)' = f' \pm g' ; (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' ; (\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' ; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$$

Proprietăţile funcţiilor derivabile

Definiţie:Fie f:D→R.Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de maxim local(respectiv de minim local)al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x) \le f(x_0)$(respectiv $f(x) \ge f(x_0)$) pentru orice $x \in D \cap U$.

Dacă $f(x) \le f(x_0)$(respectiv $f(x) \ge f(x_0)$) pentru orice $x \in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)

Teoremă . (Fermat) Fie I un interval deschis şi $x_0 \in$ I un punct de extrem al unei funcţii *f*: I→R. Dacă *f* este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0)=0$.

Definiţie:O funcţie *f*: [a, b] →R (a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema lui Rolle

Fie *f*: [a, b]→ R, a< b o funcţie Rolle astfel încât *f*(a)= *f*(b), atunci există cel puţin un punct $c \in$ (a, b) astfel încât *f*'(c)=0.

Teorema(teorema lui J. Lagrange). Fie *f* o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci $\exists$ $c \in$ (a, b) astfel încât *f*(b)- *f*(a)= (b- a)*f*'(c)

Consecinţe:

1.Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.

2.Dacă două funcţii derivabile au derivatele egale pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Rolul primei derivate

3. Fie *f* o funcţie derivabilă pe un interval I.

Dacă $f'(x) > 0 (f'(x) \ge 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict crescătoare(crescătoare) pe I.

Dacă $f'(x) < 0 (f'(x) \le 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.

4.Fie f:D$\to R$,D interval şi $x_0 \in D$.Dacă

1)f este continuă în x_0

2)f este derivabilă pe D-$\{x_0\}$

3)există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$

atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$ .Dacă $l \in R$ atunci f este derivabilă în x_0 .

Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.

Rolul derivatei a doua

T**eoremă**: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Dacă $f''(x) \ge 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.

Dacă $f''(x) \le 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.

Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.

Observaţie:Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.

Noţiunea de primitivă

Definiţie: Fie $I \subseteq R$ interval, $f : I \to R$. Se numeşte primitivă a funcţiei f pe I, orice funcţie $F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă pe I cu proprietatea $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Teoremă.Orice funcţie continuă $f : I \to R$ posedă primitive pe I.

Teoremă:Fie $f : I \to R$,I interval ,o funcţie care admite primitive pe I.Atunci f are proprietatea lui Darboux.

Consecinţe:

1.Dacă $g : I \to R$ nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul I,atunci g nu admite primitive pe I.

2.Fie $g : I \to R$.Dacă g(I)=$\{g(x) / x \in I\}$ nu este interval atunci g nu admite primitive pe I.

3.Dacă $g : I \to R$ are discontinuităţi de prima speţă atunci g nu admite primitive pe I.

Tabel de integrale nedefinite

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in N, x \in R$$

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \in R, a \neq -1, x \in (0,\infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in (0,\infty) \text{ sau } x \in (-\infty,0)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a\rangle 0, a \neq 1, x \in R$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty,-a) \text{ sau } x \in (-a,a) \text{ sau } x \in (a,\infty)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in R$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in (-a,a)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, a \neq 0, x \in R$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty,-a) \text{ sau } x \in (a,\infty)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in R$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, x \in R$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C, \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C, \sin x \neq 0$$

Integrala definită

Teoremă. Funcţiile continue pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Teoremă. Funcţiile monotone pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Proprietăţile funcţiilor integrabile.

a)**(Proprietatea de linearitate)**

Dacă f,g $:[a.b]\to R$ sunt integrabile şi $\lambda\in R\Rightarrow$

1) $\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$

b)Dacă $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$ şi este integrabilă pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

c)Dacă $f(x)\geq g(x)$ pentru orice $x\in[a,b]$ şi dacă *f* şi *g* sunt integrabile pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

d)**(Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul)**

Funcţia f : [a, b]→ **R** este integrabilă pe [a, b] dacă şi numai dacă, ∀ c ∈ (a, b) funcţiile $f_1=f|[a,c]$ şi $f_2=f|[c,b]$ sunt integrabile şi are loc formula:

$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

e)Dacă funcţia *f* este integrabilă pe $[a,b]$, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

Teoremă (Formula Leibniz - Newton)

Dacă f : [a, b]→ **R** este o funcţie integrabilă şi f admite primitive pe [a, b] atunci pentru orice primitivă F a lui f pe [a, b] are loc formula Leibniz-Newton:

$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Teorema de medie Dacă f : [a, b] → **R** este o funcţie continuă, atunci există c∈[a, b] a.i.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(c)$.

Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue

Dacă g : [a, b]→ R este o funcţie continuă,atunci funcţia G**:** [a, b]→R,

$G(x)=\int_a^x g(t)dt, x\in[a,b]$ are proprietăţile**:**

1)G este continuă pe [a, b] şi G(a) = 0

2)G este derivabilă pe [a, b] şi $G'(x)=g(x),\forall x\in[a,b]$

Reţinem: $\left(\int_a^x g(t)dt\right)'=g(x)$

Teoremă (Formula de integrare prin părţi)
Fie f , g : [a, b]$\to$ **R** cu f , g derivabile cu derivatele continue, atunci are loc **formula de integrare prin părţi**: $\int_a^b fg'dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'gdx$.

Teoremă:Fie f:[-a,a] $\to$ R, $a\rangle 0$ o funcţie continuă.Atunci

1) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx,$ dacă f este funcţie pară.

2) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,dacă f este funcţie impară.

Teoremă:Fie f:R$\to$ R o funcţie continuă de perioadă

T$\rangle 0 \Rightarrow \int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx, \forall a \in R$

Aria unui domeniu din plan

1**. Aria mulţimii** din plan D$\subset$ $\mathbf{R}^2$ mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f : [a, b]$\to$ R pozitivă şi continuă se calculează prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)dx$.

2. În cazul f : [a, b]$\to$ R continuă şi de semn oarecare, avem: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|dx$.

3. **Aria mulţimii** din plan mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$ şi graficele funcţiilor f , g : [a, b]$\to$ R continue este calculată prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx$.

Volumul unui corp de rotaţie Fie f : [a, b]$\to$ **R** o funcţie continuă, atunci corpul C_f din spaţiu obţinut prin rotirea graficului lui f , G_f, în jurul axei Ox, are volumul calculat prin formula: .V(C_f)=$\pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$